TEMA 4: AUTOCORRELACIÓN

Wooldridge: Capítulo 12

Gujarati: Capítulo 14

- **El análisis aplicado de muchos fenómenos económicos exige relajar el supuesto de <u>No Autocorrelación</u> que se hace en el modelo clásico de regresión.**

- **El contexto "natural" de análisis de este fenómeno es el de series temporales.**

- **Este fenómeno NO se presenta en el caso de sección cruzada en que los individuos son independientes entre sí.**

Econometría. Tema 4. Pilar Abad

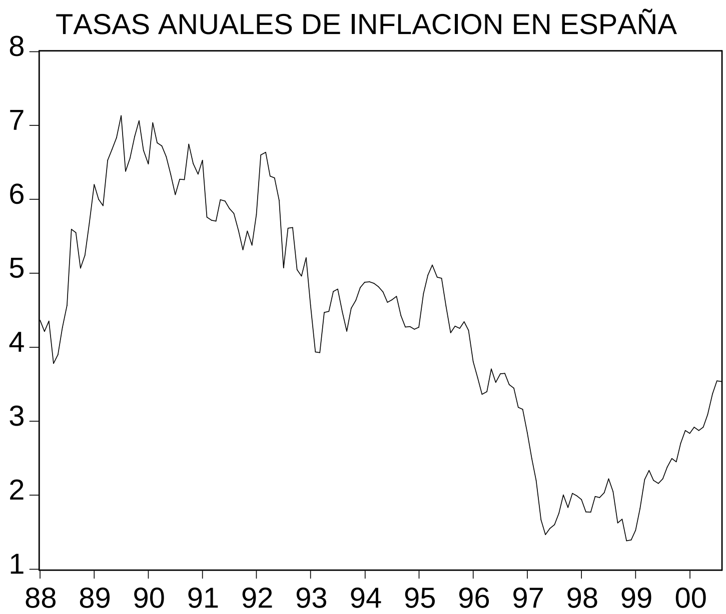
- **En datos económicos de series temporales (en los que el orden en que ocurren las observaciones es relevante) es bastante frecuente la presencia de autocorrelación.**
  - **Se suelen observar pautas de regularidad que pueden ser muestras de autocorrelación.**
  - **También la inercia de los datos económicos causa dependencia temporal.**
  - **Es bastante posible que los shocks o perturbaciones que afectan a las variables económicas presenten dependencia temporal.**

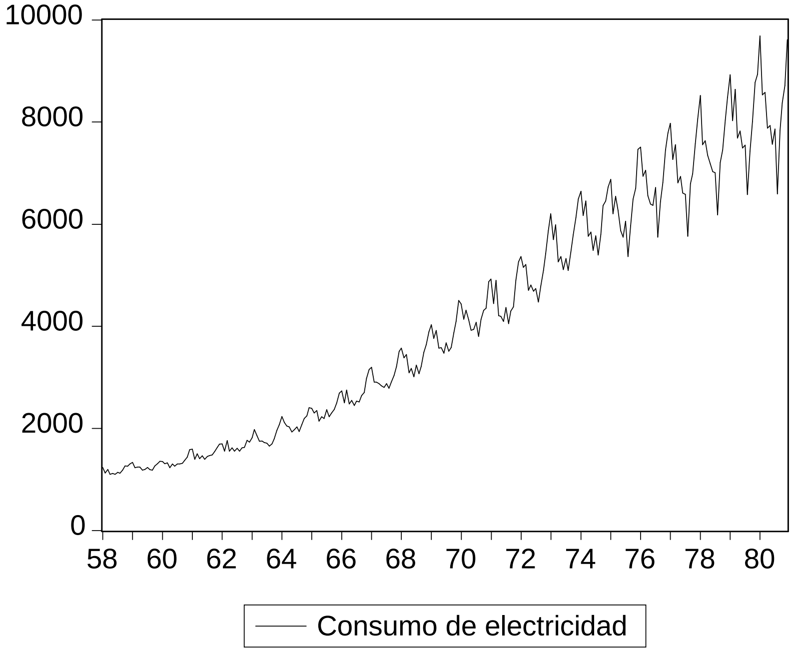
Supongamos que queremos analizar $Y_t = F(K_t, L_t)$ con datos trimestrales. Se produce una huelga de trabajadores que afecta a la producción del trimestre.

No autocorrelación: no hay motivo para pensar que la perturbación se trasladará al siguiente trimestre.

Autocorrelación: Afecta a la producción del siguiente/s trimestre.

Ejemplos:





Modelo de Regresión Lineal con autocorrelación

- **Por simplicidad consideraremos el caso del modelo de regresión simple donde solamente condicionamos a una variable.**
- **Utilizaremos como subíndice *t, s* o *t-j* para resaltar que el análisis que vamos a hacer es especialmente relevante con datos de series temporales.**
- **Vamos a suponer que disponemos de una serie temporal (Y_t, X_t) con $t = 1,\dots,T$.**
- **Vamos a suponer que se cumplen todos los supuestos del modelo de regresión excepto el que se refiere a la independencia de las observaciones.**

● **Dada una serie temporal con *T* observaciones podemos escribir el modelo como:**

$$Y_t = \alpha + \beta X_t + \varepsilon_t \qquad t = 1,\ldots,T$$

donde:

1. - $E(\varepsilon_t | X) = 0$

Este supuesto se cumplía siempre con observaciones independientes (sección cruzada). Implica que el término de error está incorrelacionado con la variable explicativa en cada uno de los períodos temporales.

Este supuesto necesitamos hacerlo para garantizar la insesgadez y consistencia del estimador.

2. - Suponemos también que se cumple el supuesto de homocedasticidad:

$V(\varepsilon_t | X) = \sigma^2 \quad \forall t = 1,2,..,T$

3. - Pero en el modelo tenemos <u>Autocorrelación</u> o correlación serial:

$$C(Y_t, Y_{t-j} | X) = C(\varepsilon_t, \varepsilon_{t-j} | X) = C(\varepsilon_t, \varepsilon_{t-j} | X_t, X_{t-j}) = \sigma_{t,t-j} \, (j \neq 0)$$

Este supuesto implica que la correlación entre dos perturbaciones puede ser distinta de cero. Autocorrelación para al menos algún *t* y *t-j*.

Vamos a suponer que: $\sigma_{t,t-j} = \gamma_j$

lo que implica que la covarianza entre dos perturbaciones ocurridas en dos períodos distintos (*t* y *t-j*) sólo depende del tiempo *j* transcurrido entre ellos, no del momento del tiempo *t* considerado.

Por ejemplo, la covarianza condicional de las perturbaciones ocurridas en 1980 y 1985 será la misma que entre 1990 y 1995.

1. ORIGEN DE LA AUTOCORRELACIÓN

- **Por la naturaleza de los fenómenos analizados.**

  La gran mayoría de las variables económicas presenta un comportamiento inercial (tendencias, ciclos, estacionalidad) lo que se traduce en la existencia de autocorrelación.

- **Por la agregación de los datos.**

  Al agregar datos se suavizan las fluctuaciones de los datos intermedios lo que puede producir un patrón sistemático en los datos.

- **La existencia de autocorrelación en la perturbación puede ser un síntoma de existencia de un error de especificación.**

2. PROPIEDADES DEL ESTIMADOR MCO

- **¿Qué propiedades tendrá el estimador de MCO en este contexto?**
  - **El estimador es insesgado y consistente**
  - **El estimador no es eficiente.**

Veamos la expresión de la varianza:

$$V(\hat{\beta}|X) = V(\sum_t c_t Y_t) = \sum_t c_t^2 V(Y_t|X) + 2\sum_j \sum_{t>j} c_t c_{t-j} C(Y_t, Y_{t-j}|X) =$$

$$\underset{V(Y_t|X)=\sigma^2}{=} \sigma^2 \sum_t c_t^2 + 2\sum_j \sum_{t>j} c_t c_{t-j} C(Y_t, Y_{t-j}|X) \underset{C(Y_t, Y_{t-j}|X)=\gamma_j}{=} \sigma^2 \frac{1}{\sum_t x_t^2} + 2\sum_j \gamma_j \sum_{t>j} c_t c_{t-j}$$

Nótese que esta expresión no es la habitual → La construcción de intervalos de confianza y la contrastación de hipótesis que se realiza a partir de la expresión del caso de no

autocorrelación $V(\hat{\beta}|X_t) = \sigma_{\hat{\beta}}^2 = \frac{\sigma^2}{\sum_t x_t} = \frac{\sigma^2}{TS_X^2}$ **no son válidas. La importancia del "sesgo" dependerá de la magnitud de la autocorrelación.**

- **Todos estos resultados son fácilmente ampliables al contexto de regresión lineal múltiple.**

3. INFERENCIA ROBUSTA A LA HETEROCEDASTICIDAD Y AUTOCORRELACIÓN: PROPUESTA DE NEWEY-WEST

- **En cualquier caso y a partir de resultados asintóticos, puede llevarse a cabo la construcción "aproximada" de intervalos de confianza y la contrastación de hipótesis, empleando la propuesta de estimación para la matriz de varianzas y covarianzas de Newey-West (1987).**
- **Se puede emplear la matriz de Newey-West para construir intervalos de confianza y realizar contrastes de hipótesis como se hace habitualmente.**
- **La filosofía empleada es equivalente a la del estimador de la varianza propuesto por White para el caso de heterocedasticidad.**

Ejemplo

Función agregada de consumo española

$Y_t = \alpha + \beta X_t + \varepsilon_t$

Y: **log(Gasto agregado)**

X: **log(Renta agregada)**

Datos Contabilidad nacional 1964-1995

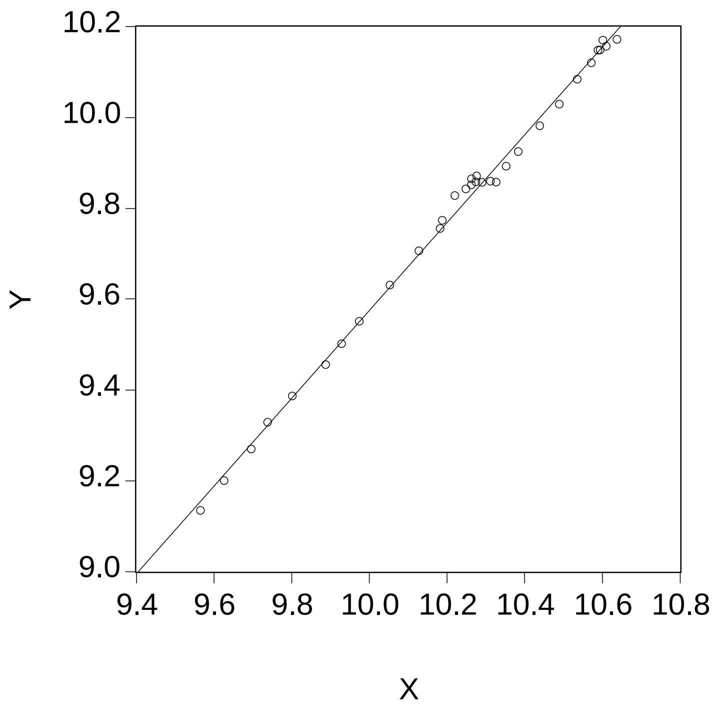
Dependent Variable: Y
Method: Least Squares
Sample: 1964 1995
Included observations: 32

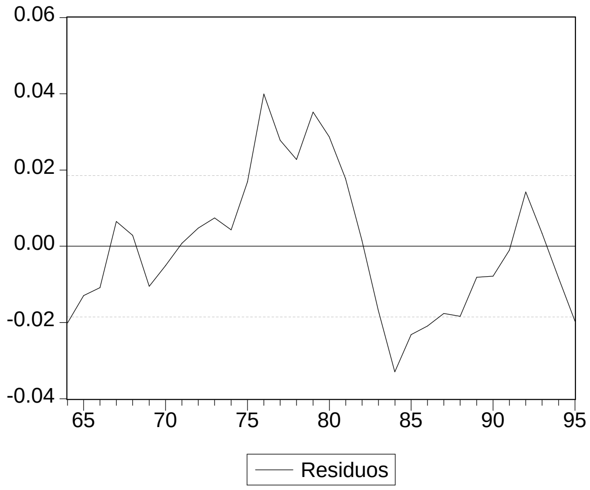
	Coefficient	Std. Error	t-Statistic	Prob.
C	-0.089095	0.110773	-0.804309	0.4275
X	0.966450	0.010834	89.20459	0.0000

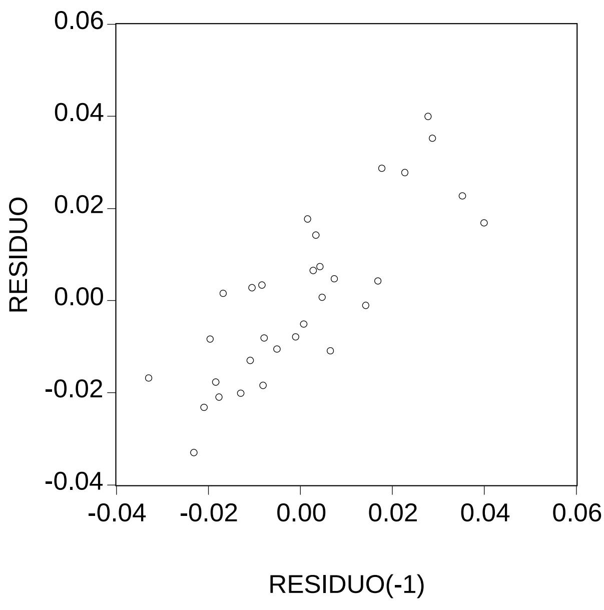
R-squared	0.996244	Mean dependent var	9.788000
Adjusted R-squared	0.996119	S.D. dependent var	0.297676
S.E. of regression	0.018545	Akaike info criterion	-5.076803
Sum squared resid	0.010317	Schwarz criterion	-4.985194
Log likelihood	83.22884	F-statistic	7957.459
Durbin-Watson stat	0.346022	Prob(F-statistic)	0.000000

INTERVALO NO ROBUSTO AUTOCORRELACIÓN

$$\hat{\beta} \pm 1{,}96 \times s(\hat{\beta}) \qquad 0{,}966 \pm 1{,}96 \times 0{,}0108 \Rightarrow [0{,}944\,;\,0{,}987]$$




0.06
0.04
0.02
0.00
-0.02
-0.04
65
70
75
80
85
90
95
Residuos


0.06
0.04
0.02
0.00
-0.02
-0.04
RESIDUO
-0.04
-0.02
0.00
0.02
0.04
0.06
RESIDUO(-1)

Dependent Variable: Y
Method: Least Squares
Sample: 1964 1995
Included observations: 32
Newey-West HAC Standard Errors & Covariance (lag truncation=3)

	Coefficient	Std. Error	t-Statistic	Prob.
C	-0.089095	0.106867	-0.833701	0.4110
X	0.966450	0.010595	91.21764	0.0000

R-squared	0.996244	Mean dependent var	9.788000
Adjusted R-squared	0.996119	S.D. dependent var	0.297676
S.E. of regression	0.018545	Akaike info criterion	-5.076803
Sum squared resid	0.010317	Schwarz criterion	-4.985194
Log likelihood	83.22884	F-statistic	7957.459
Durbin-Watson stat	0.346022	Prob(F-statistic)	0.000000

INTERVALO ROBUSTO

$$\hat{\beta} \pm 1{,}96 \times s(\hat{\beta}) \qquad 0{,}966 \pm 1{,}96 \times 0{,}0106 \Rightarrow [0{,}945\,;\,0{,}986]$$

4. PROCEDIMIENTOS DE DETECCIÓN

- **Importante: En el contexto de regresión es mejor analizar la posible autocorrelación a partir de los residuos MCO.**
- **Los métodos gráficos ya ilustrados**
- **Contrastes formales**

  Hay múltiples propuestos en la literatura

Vamos a considerar contrastes ampliamente utilizados →

Contrastes de Durbin-Watson y de Breusch-Godfrey.

CONTRASTE DURBIN-WATSON

- **A pesar de sus muchas limitaciones es muy popular.**
- **Consideremos el modelo:**

$$Y_t = \beta_0 + \beta_1 X_{1t} + ... + \beta_k X_{kt} + \varepsilon_t$$

en el que deseamos contrastar si ε_t presenta estructura autorregresiva de orden uno o AR(1), es decir:

$\varepsilon_t = \varphi_1 \varepsilon_{t-1} + u_t \qquad |\varphi| < 1$ **donde u_t es ruido blanco.**

H_0: No autocorrelación

H_1: AR(1)

Para efectuar el contraste haremos:

1º) Se estima por MCO el modelo $Y_t = \beta_0 + \beta_1 X_{1t} + ... + \beta_k X_{kt} + \varepsilon_t$ y obtenemos $\hat{\varepsilon}$

2º) Se calcula:

$$d = \frac{\sum_{t=2}^{T} \left(\hat{\varepsilon}_t - \hat{\varepsilon}_{t-1}\right)^2}{\sum_{t=1}^{T} \hat{\varepsilon}_t^2} \approx 2(1-r)$$

siendo: $r = \dfrac{\sum_{t=2}^{T} \hat{\varepsilon}_t \hat{\varepsilon}_{t-1}}{\sum_{t=2}^{T} \hat{\varepsilon}_t^2}$

3º) Se compara el valor con los de las Tablas específicas.

Nótese que:

$d \approx 0 \rightarrow$ **Autocorrelación +**

$d \approx 2 \rightarrow$ **NO Autocorrelación**

$d \approx 4 \rightarrow$ **Autocorrelación –**

Presenta muchos problemas, entre otros:

1º) Sólo es válido en el marco de estructuras AR(1)

2º) El contraste tiene zonas de indeterminación.

Según el valor de n y de k y el nivel de significación, las tablas del Durbin-Watson nos proporcionan unos valores d_L (límite inferior) y d_U (límite superior) según los cuales:

0- d_L: Se rechaza la H_0: existe autocorrelación de primer orden positiva.

d_L- d_U: Indeterminación.

d_U -2- $(4-d_U)$: No se rechaza H_0: no existe autocorrelación de primer orden.

$(4-d_U)$-$(4-d_L)$: Indeterminación.

$(4-d_L)$-4: Se rechaza la H_0: existe autocorrelación de primer orden negativa.

→ Mejor emplear otros contrastes

CONTRASTE DE BREUSCH GODFREY

- **Consideremos el modelo:** $Y_t = \beta_0 + \beta_1 X_{1t} + ... + \beta_k X_{kt} + \varepsilon_t$

en el que deseamos contrastar si ε_t **presenta autocorrelación de orden "p". Por ejemplo, AR(p):** $\varepsilon_t = \varphi_1 \varepsilon_{t-1} + \varphi_2 \varepsilon_{t-2} + ... + \varphi_p \varepsilon_{t-p} + u_t$ **donde** u_t **es ruido blanco.**

H_0: No autocorrelación

H_1: Autocorrelación de orden "p": AR(p) ó MA(p)

$\varepsilon_t = \varphi_1 \varepsilon_{t-1} + \varphi_2 \varepsilon_{t-2} + ... + \varphi_p \varepsilon_{t-p} + u_t$ **AR(p)**

$u_t - \theta_1 u_{t-1} - \theta_2 u_{t-2} - ... - \theta_p u_{t-p} = a_t$ **MA(p)**

1º) Se estima por MCO el modelo $Y_t = \beta_0 + \beta_1 X_{1t} + ... + \beta_k X_{kt} + \varepsilon_t$ **y obtenemos** $\hat{\varepsilon}$

2º) Se estima por MCO el modelo:

$\hat{\varepsilon}_t = \delta_1 \hat{\varepsilon}_{t-1} + \delta_2 \hat{\varepsilon}_{t-2} + ... + \delta_p \hat{\varepsilon}_{t-p} + \gamma_0 + \gamma_1 X_{1t} + ... + \gamma_k X_{kt} + w_t$ **y se obtiene el coeficiente**

de determinación $R^2_{\hat{\varepsilon}}$

3º) Se contrasta

$H_0: \delta_1 = \delta_2 = ... = \delta_p = 0 \quad (NO\ AUTOCORRELACION)$

$H_1: AUTOCORRELACION\ ORDEN\ p$

Si la hipótesis nula es cierta $T \times R^2_{\hat{\varepsilon}} \underset{asy}{\sim} \chi^2_p$

EJEMPLO

Función agregada de consumo española

$$Y_t = \alpha + \beta X_t + \varepsilon_t$$

Y: **log(Gasto agregado)**

X: **log(Renta agregada)**

Datos Contabilidad nacional 1964-1995

Econometría. Tema 4. Pilar Abad

Dependent Variable: Y
Method: Least Squares
Sample: 1964 1995
Included observations: 32

	Coefficient	Std. Error	t-Statistic	Prob.
C	-0.089095	0.110773	-0.804309	0.4275
X	0.966450	0.010834	89.20459	0.0000

R-squared	0.996244	Mean dependent var	9.788000
Adjusted R-squared	0.996119	S.D. dependent var	0.297676
S.E. of regression	0.018545	Akaike info criterion	-5.076803
Sum squared resid	0.010317	Schwarz criterion	-4.985194
Log likelihood	83.22884	F-statistic	7957.459
Durbin-Watson stat	0.346022	Prob(F-statistic)	0.000000

Para n=32, k=1 y α=0,05: d_L=1,373 y d_U=1,502.

Como d=0,34< d_L=1,373: Se rechaza H_0: Existe autocorrelación positiva de orden 1.

Breusch-Godfrey Serial Correlation LM Test:

F-statistic	53.21564	Probability	0.000000
Obs*R-squared	20.71261	Probability	0.000005

Test Equation:
Dependent Variable: RESID
Method: Least Squares

Variable	Coefficient	Std. Error	t-Statistic	Prob.
C	0.010107	0.066928	0.151017	0.8810
X	-0.001038	0.006546	-0.158613	0.8751
RESID(-1)	0.820714	0.112505	7.294905	0.0000

R-squared	0.647269	Mean dependent var	-2.22E-15
Adjusted R-squared	0.622943	S.D. dependent var	0.018243
S.E. of regression	0.011202	Akaike info criterion	-6.056352
Sum squared resid	0.003639	Schwarz criterion	-5.918940
Log likelihood	99.90164	F-statistic	26.60782
Durbin-Watson stat	1.390554	Prob(F-statistic)	0.000000

Se rechaza H_0: No autocorrelación orden uno

Breusch-Godfrey Serial Correlation LM Test:

F-statistic	29.26852	Probability	0.000000
Obs*R-squared	21.64605	Probability	0.000020

Test Equation:
Dependent Variable: RESID
Method: Least Squares

Variable	Coefficient	Std. Error	t-Statistic	Prob.
C	0.011371	0.065240	0.174299	0.8629
X	-0.001151	0.006381	-0.180372	0.8582
RESID(-1)	1.057451	0.185006	5.715754	0.0000
RESID(-2)	-0.295111	0.185744	-1.588803	0.1233

R-squared	0.676439	Mean dependent var	-2.22E-15
Adjusted R-squared	0.641772	S.D. dependent var	0.018243
S.E. of regression	0.010919	Akaike info criterion	-6.080171
Sum squared resid	0.003338	Schwarz criterion	-5.896954
Log likelihood	101.2827	F-statistic	19.51235
Durbin-Watson stat	1.852021	Prob(F-statistic)	0.000000

Se rechaza H_0: No autocorrelación orden dos

5. PROCEDIMIENTOS DE ESTIMACIÓN

A modo ilustrativo consideraremos un modelo con AR(1)

- **Consideremos el modelo**

  $$Y_t = \alpha + \beta X_t + \varepsilon_t$$

  con

  $$\varepsilon_t = \varphi_1 \varepsilon_{t-1} + u_t \qquad |\varphi| < 1$$

  u_t "ruido blanco"

En este caso MCO no es el Estimador Lineal Insesgado de Mínima Varianza → Existe un estimador alternativo que es más eficiente (Mínimos Cuadrados Generalizados).

Econometría. Tema 4. Pilar Abad

- **Si φ es conocido→ "Modelo cuasidiferenciado"**

$$Y_t - \varphi Y_{t-1} = \alpha(1-\varphi) + \beta(X_t - \varphi X_{t-1}) + \varepsilon_t - \varphi \varepsilon_{t-1}$$

Se estima por MCO

El problema es que habitualmente φ es desconocido

- **Si φ es desconocido→ Habrá que estimarlo "Cochrane Orcutt" o "Métodos no lineales"**

Cochrane-Orcutt

1º) Se estima por MCO el modelo $Y_t = \alpha + \beta X_t + \varepsilon_t$ **Y OBTENEMOS** $\hat{\varepsilon}$

2º) Se estima por MCO la regresión $\hat{\varepsilon}_t = \varphi \hat{\varepsilon}_{t-1} + u_t$ **y se obtiene** $\hat{\varphi}$

3º) Se estima por MCO el modelo $Y_t - \hat{\varphi} Y_{t-1} = \mu + \beta (X_t - \hat{\varphi} X_{t-1}) + u_t$

4º) Se obtienen unos nuevos residuos del modelo original a partir de las estimaciones del paso 3º y se vuelve al paso 2º

5º) El proceso se para cuando entre una y otra iteración los parámetros estimados varían muy poco.

Métodos no lineales

$$Y_t - \varphi Y_{t-1} = \alpha(1-\varphi) + \beta(X_t - \varphi X_{t-1}) + \varepsilon_t - \varphi \varepsilon_{t-1}$$

$$\downarrow$$

$$Y_t = \alpha(1-\varphi) + \varphi Y_{t-1} + \beta(X_t - \varphi X_{t-1}) + \varepsilon_t - \varphi \varepsilon_{t-1}$$

$$\downarrow$$

$$Y_t = \alpha(1-\varphi) + \varphi Y_{t-1} + \beta X_t - \beta \varphi X_{t-1} + u_t$$

Se estima por procedimientos no lineales (MCNL)

Importante:

a) **Ambos procedimientos son fácilmente ampliables a procesos AR(p)**

b) **Ambos procedimientos proporcionan estimaciones consistentes de los parámetros y asintóticamente más eficientes que MCO.**